Densité des polynômes orthogonaux

[Obj. A]

Thm : Soient I intervalle de $\mathbb{R}$, $\rho : I \to \mathbb{R}$ un poids (mes., $\rho > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x)\,dx < \infty$.)
Si $\exists a > 0$, $\int_I e^{a|x|} \rho(x)\,dx < \infty$, alors la famille (unique) de polynômes (unitaires) orthogonaux obtenue par Gram-Schmidt forme une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.
de norme 1.

* Notons (P_n) la famille obtenue par G.S. appliqué à $(g_n : x \mapsto x^n)$.
Par TSO, il suffit de voir que $\mathrm{Vect}(P_n)^\perp = \{0\}$.
Or, $\mathrm{Vect}(P_n) = \mathrm{Vect}(g_n)$.
Donc on va montrer que si $f \in L^2(I,\rho)$ avec $\langle f, g_n \rangle_\rho = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors $f = 0$.

* Soit f une telle fonction. Soit $\varphi = f \rho \mathbb{1}_I$.
$\forall x \in I$, $|\varphi(x)| \leq \frac{1 + |f(x)|^2}{2} \rho(x)$ et $\begin{cases} \rho \in L^1(I) \text{ car fonction poids} \\ |f|^2 \rho \text{ intégrable sur } I \text{ car } f \in L^2(I,\rho). \end{cases}$

Donc $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$.

* On peut donc considérer $\hat{\varphi} : \xi \mapsto \int_I f(x) e^{-i\xi x} \rho(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-i\xi x}\,dx$
Notons $B_a = \{z \in \mathbb{C},\ |\mathrm{Im}\, z| < \frac{a}{2}\}$, $g : \begin{array}{l} B_a \times I \to \mathbb{C} \\ (z,x) \mapsto e^{-izx} f(x) \rho(x) \end{array}$

Si $z \in B_a$, alors $\int_I |g(z,x)|\,dx \leq \int_I e^{a|x|/2} |f(x)| \rho(x)\,dx \underset{C\text{-}S}{\leq} \left(\int_I e^{|ax|} \rho(x)\,dx \right)^{1/2} \|f\|_{2,\rho} < \infty$
Donc : $F : \begin{array}{l} B_a \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \int_I g(z,x)\,dx \end{array}$ est bien définie.

- $\forall z \in B_a$, $x \mapsto g(z,x)$ est mesurable.
- $\forall x \in I$, $z \mapsto g(z,x)$ est holomorphe.
- $\forall z \in B_a$, $\forall x \in I$, $|g(z,x)| \leq e^{a|x|/2} |f(x)| \rho(x)$ qui est intégrable sur I.

Donc F est holomorphe sur B_a et coïncide sur $\mathbb{R}$ avec $\hat{\varphi}$.

* Par le thm précédent, $\forall n \in \mathbb{N}$, $F^{(n)}(0) = (-i)^n \int_I x^n f(x) \rho(x)\,dx = (-i)^n \langle f, g_n \rangle_\rho = 0$
Donc en développant F en série entière au voisinage de 0, $F = 0$ sur un voisinage de 0. Le thm de prolongement analytique assure alors $F = 0$ sur B_a.

Donc $\hat{\varphi} = F_{|\mathbb{R}} = 0$.

Par injectivité de la TF sur L^1, $\varphi = 0$ pp sur $\mathbb{R}$, puis, puisque $\rho > 0$, $f = 0$ pp sur I, i.e. $f = 0$ dans $L^2(I,\rho)$. Donc (P_n) est totale.

Pour $I = \mathbb{R}_+^*$, $\rho(x) = x^{-\ln x}$ définit une fonction poids sur I mais, pour $f : x \mapsto \sin(2\pi \ln x)$
$\langle f, g_n \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{ny} \sin(2\pi y) e^{-y^2+y}\,dy = \exp\left(\frac{(n+1)^2}{4}\right) \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\left(y - \frac{(n+1)}{2}\right)^2\right) \sin(2\pi y)\,dy$
$= (-1)^{n+1} \exp\left(\frac{(n+1)^2}{4}\right) \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} \sin(2\pi t)\,dt = 0$
car impaire

mais $f \neq 0$.